Exercice 1

$f(x) = x \ln x \qquad x>0$

$g(x) = x^2 \ln x \qquad x>0$

1) pour $x>0$ on a :

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 . \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln x + x$$

2) pour $x>0$

$$g'(x) = 2x \ln x + x$$

$$= 2 f(x) + x$$

$$\Rightarrow g'(x) - x = 2 f(x)$$

3) f est continu sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow$ f admet une primitive F sur $]0,+\infty[$

On a :

$$f(x) = \frac{1}{2} g'(x) - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{x^2}{4} + cte$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + cte}$$

Exercice 2

1) $f(x) = \ln(2x+1)$

$2x+1>0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$x>0$ et $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Donc f est dérivable sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

3) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$, $x>-1$

f est dérivable si et seulement si on a : $\ln(x+1) > 0$

$\ln(x+1) > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow x > 0$

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(\ln(x+1))'}{2\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2\sqrt{\ln(x+1)}} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

f est dérivable si et seulement si on a :

$x^2 - 3x > 0$ or $x^2 - 3x = x(x-3)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de x^2-3x	$+$		0	$-$	0		$+$

Donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x)'}{(x^2-3x)} = \frac{2x-3}{(x^2-3x)}$$